Dorin Andrica
Eugen Jecan
Camelia Maria Magdaş

GEOMETRIE

Teme şi probleme pentru grupele de excelență

Clasele VII-X

Editura Paralela 45

Cuprins

Introducere **9**

Capitolul 1 Elemente de geometria cercului **11**
1.1 Elemente de geometria cercului. Probleme generale . . . 11
1.1.1 Probleme rezolvate . . . 11
1.1.2 Probleme propuse . . . 23
1.1.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 25
1.2 Puterea punctului faţă de cerc . . . 35
1.2.1 Probleme rezolvate . . . 36
1.2.2 Probleme propuse . . . 43
1.2.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 45
1.3 Probleme de tangenţă . . . 56
1.3.1 Probleme rezolvate . . . 59
1.3.2 Probleme propuse . . . 66
1.3.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 67

Capitolul 2 Elemente de trigonometrie **77**
2.1 Aplicaţii directe . . . 77
2.1.1 Probleme rezolvate . . . 77
2.1.2 Probleme propuse . . . 81
2.1.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 86
2.2 Sume şi produse trigonometrice . . . 98
2.2.1 Probleme rezolvate . . . 98
2.2.2 Probleme propuse . . . 104
2.2.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 105
2.3 Aplicaţii ale trigonometriei în geometrie . . . 111
2.3.1 Probleme rezolvate . . . 111
2.3.2 Probleme propuse . . . 118
2.3.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 123
2.4 Inegalităţi trigonometrice . . . 138

2.4.1 Probleme rezolvate . . . 138
2.4.2 Probleme propuse . . . 142
2.4.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 144
2.5 Ecuaţii trigonometrice . . . 152
2.5.1 Probleme rezolvate . . . 152
2.5.2 Probleme propuse . . . 156
2.5.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 158

Capitolul 3 Metoda vectorială în geometria plană **163**
3.1 Vectori liberi. Operaţii cu vectori . . . 163
3.1.1 Probleme rezolvate . . . 164
3.1.2 Probleme propuse . . . 170
3.1.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 172
3.2 Vectori de poziţie . . . 182
3.2.1 Probleme rezolvate . . . 183
3.2.2 Probleme propuse . . . 189
3.2.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 191
3.3 Produs scalar şi aplicaţii . . . 199
3.3.1 Probleme rezolvate . . . 200
3.3.2 Probleme propuse . . . 204
3.3.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 205

Capitolul 4 Transformări ale planului euclidian **209**
4.1 Translaţia . . . 209
4.1.1 Probleme rezolvate . . . 209
4.1.2 Probleme propuse . . . 213
4.1.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 213
4.2 Simetria . . . 216
4.2.1 Probleme rezolvate . . . 217
4.2.2 Probleme propuse . . . 223
4.2.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 225
4.3 Rotaţia . . . 230
4.3.1 Probleme rezolvate . . . 230
4.3.2 Probleme propuse . . . 236
4.3.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 237
4.4 Omotetii şi inversiuni . . . 239
4.4.1 Probleme rezolvate . . . 239
4.4.2 Probleme propuse . . . 244
4.4.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 244

Capitolul 5 Numere complexe **251**
5.1 Aplicaţii ale numerelor complexe în algebră . . . 251
5.1.1 Probleme rezolvate . . . 251
5.1.2 Probleme propuse . . . 260
5.1.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 264
5.2 Aplicaţii ale numerelor complexe în geometrie . . . 278
5.2.1 Probleme rezolvate . . . 278
5.2.2 Probleme propuse . . . 287
5.2.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 289

Capitolul 6 Maxime şi minime geometrice **299**
6.1 Maxime şi minime geometrice . . . 299
6.1.1 Probleme rezolvate . . . 299
6.1.2 Probleme propuse . . . 315
6.1.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 322
6.2 Inegalitatea Erdös–Mordell . . . 359
6.2.1 Probleme rezolvate . . . 359
6.2.2 Probleme propuse . . . 362
6.2.3 Soluţiile problemelor propuse . . . 362

Bibliografie **365**

Capitolul 1

Elemente de geometria cercului

1.1 Elemente de geometria cercului. Probleme generale

1.1.1 Probleme rezolvate

1. *Să se arate că într-un triunghi mijloacele laturilor, picioarele înălţimilor şi mijloacele segmentelor ce unesc fiecare vârf cu ortocentrul triunghiului sunt situate pe un acelaşi cerc (cercul lui Euler – cercul celor 9 puncte).*

Soluţie. Considerăm triunghiul ABC ascuţitunghic şi notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ şi $[AB]$ şi cu A_1', B_1', C_1' mijloacele segmentelor $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$.

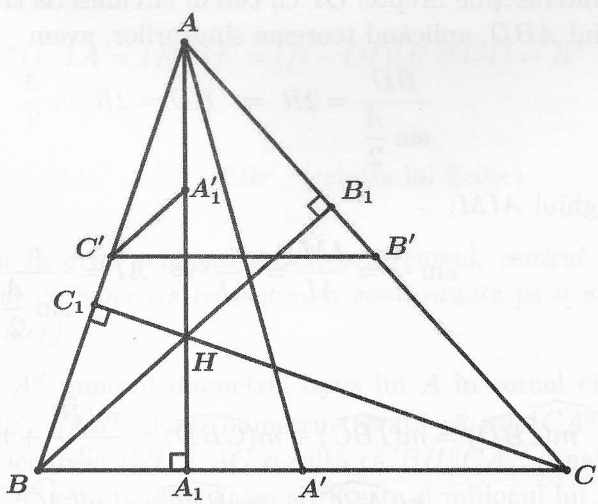

Figura 1.1

Din $[B'C']$ linie mijlocie în triunghiul ABC rezultă că $B'C' \| BC$ şi $B'C' = \dfrac{BC}{2}$. Rezultă că $BCB'C'$ este trapez. Deoarece $[A'B']$ este linie mijlocie în triunghiul ABC rezultă că $A'B' \| AB$ şi $A'B' = \dfrac{AB}{2}$. În triunghiul dreptunghic AA_1B, A_1C' este mediana corespunzătoare ipotenuzei, deci $A_1C' = \dfrac{AB}{2}$, de unde $[A'B'] = [A_1C']$, adică $A_1C'B'A'$ este trapez isoscel, iar punctele A_1, A', B', C' sunt conciclice. În mod analog se arată că B_1, A', C', B' şi C_1, A', B', C' sunt conciclice, deci A_1, B_1, C_1 se găsesc pe cercul ce trece prin punctele A', B', C'. Pentru ca A_1' să se găsească pe acelaşi cerc, vom arăta că patrulaterul $A_1'C'A'B'$ este inscriptibil. Deoarece $[A'C']$ este linie mijlocie în triunghiul ABC rezultă că $A'C' \| AC$. În triunghiul ABH, $[C'A_1']$ este linie mijlocie, deci $C'A_1' \| BH$, dar $BH \perp AC$, de unde $A_1'C' \perp A'C'$. Analog $A_1'B' \perp A'B'$, deci $A_1'C'A'B'$ este patrulater inscriptibil, adică A_1' se găseşte pe cercul determinat de A', B', C'. Analog se arată că şi B_1', C_1' se află pe acelaşi cerc. Cele nouă puncte se găsesc pe acelaşi cerc, numit cercul lui Euler, în care $[A_1'A']$, $[B_1'B']$, $[C_1'C']$ sunt diametre.

2. *Se consideră triunghiul ABC şi O, respectiv I centrele cercurilor circumscris, respectiv înscris în triunghiul ABC. Să se arate că $OI^2 = R^2 - 2Rr$, unde R, respectiv r sunt razele cercurilor circumscris, respectiv înscris în triunghiul ABC.*

Soluţie. Fie D punctul în care bisectoarea $(AD$ intersectează cercul, iar E şi F intersecţiile dreptei OI cu cercul circumscris triunghiului ABC. În triunghiul ABD, aplicând teorema sinusurilor, avem

$$\frac{BD}{\sin\dfrac{A}{2}} = 2R \Rightarrow BD = 2R\sin\frac{A}{2}.$$

În triunghiul AIM:

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{IM}{AI} = \frac{r}{AI} \Rightarrow AI = \frac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}.$$

Avem

$$m(\widehat{IBD}) = m(\widehat{IBC}) + m(\widehat{CBD}) = \frac{m(\widehat{B})}{2} + m(\widehat{CAD})$$
$$= \frac{m(\widehat{ABC})}{2} + \frac{m(\widehat{BAC})}{2} = \frac{m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{BC})}{4};$$

$$m(\widehat{BID}) = \frac{m(\overset{\frown}{BC})}{4} + \frac{m(\overset{\frown}{AC})}{4} \text{ (unghi cu vârful în interiorul cercului).}$$

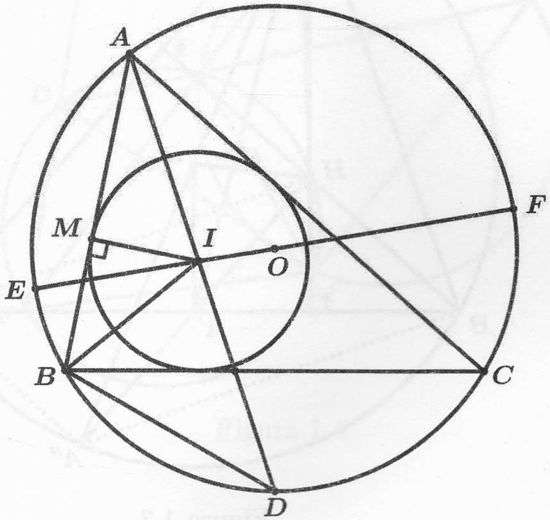

Figura 1.2

Din cele două relaţii deducem că triunghiul IBD este isoscel, deci $[BD] \equiv [ID]$. Folosind puterea punctului I faţă de cercul de centru O, avem:

$$2Rr = ID \cdot IA = IE \cdot IF = (R - OI)(R + OI) = R^2 - OI^2,$$

de unde

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \quad \text{(relaţia lui Euler).}$$

3. *Să se arate că în orice triunghi ABC, ortocentrul, centrul de greutate şi centrul cercului circumscris triunghiului sunt situate pe o aceeaşi dreaptă (dreapta lui Euler).*

Soluţie. Fie A'' punctul diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului ABC. $[AA'']$ fiind diametru rezultă că $m(\widehat{ACA''}) = 90°$, deci $AC \perp CA''$. Deoarece $BH \perp AC$ rezultă că $BH \| CA''$. Analog $CH \| BA''$, de unde $BHCA''$ este paralelogram şi A' este şi mijlocul lui HA''.

În triunghiul AHA'', OA' este linie mijlocie, deci $OA' = \frac{1}{2}AH$.

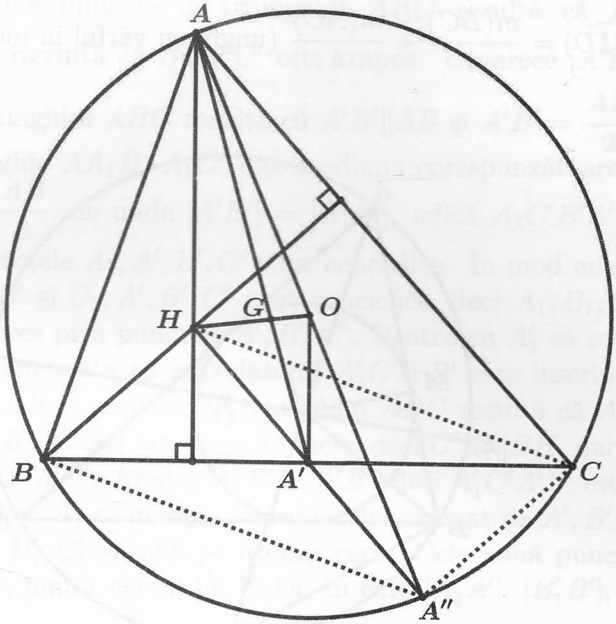

Figura 1.3

Notăm $HO \cap AA' = \{G\}$. Avem $\triangle AHG \sim \triangle A'OG$, de unde

$$\frac{AH}{OA'} = \frac{AG}{GA'} = \frac{HG}{OG} = 2,$$

deci $AG = 2GA'$, ceea ce arată că G este chiar centrul de greutate al triunghiului ABC.
În concluzie, punctele O, H, G sunt coliniare şi $HG = 2GO$.

4. *Fie $ABCD$ un patrulater convex şi fie $AB \cap CD = \{E\}$, $BC \cap AD = \{F\}$. Cercurile circumscrise triunghiurilor ABF, ADE, CFD, ECB trec prin acelaşi punct M (punctul lui Miquel).*

Soluţie. Notăm cu M al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor BCE şi DCF. Patrulaterul $CBEM$ fiind inscriptibil rezultă că

$$m(\widehat{CME}) = m(\widehat{ABC}).$$

În patrulaterul inscriptibil $CDFM$ avem $m(\widehat{CMF}) = m(\widehat{ADC})$.

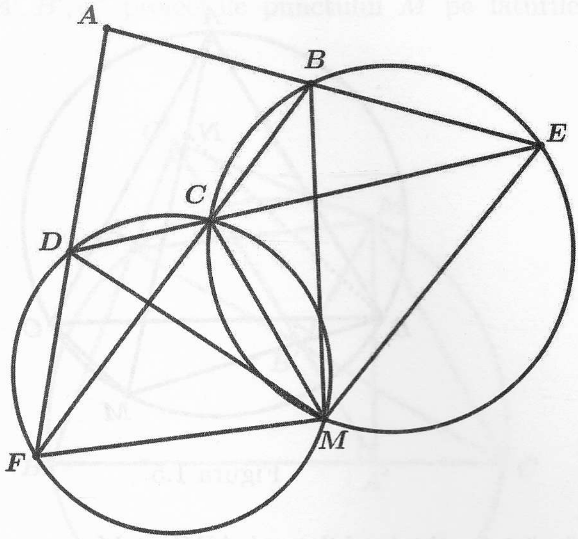

Figura 1.4

Atunci

$$\begin{aligned} m(\widehat{BAF}) + m(\widehat{BMF}) &= m(\widehat{BAF}) + m(\widehat{BMC}) + m(\widehat{CMF}) \\ &= m(\widehat{EAD}) + m(\widehat{AED}) + m(\widehat{ADE}) \\ &= 180^\circ, \end{aligned}$$

deci patrulaterul $ABMF$ este inscriptibil, adică punctul M se află pe cercul circumscris triunghiului ABF. Analog se arată că patrulaterul $ADME$ este inscriptibil. Prin urmare M aparţine cercurilor circumscrise triunghiurilor ABF, ADE, CBE şi CDF.

5. *Dacă M este un punct situat pe arcul $\overset{\frown}{BC}$ al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC, atunci $AM = BM + CM$ (Schooten).*

Soluţie. Fie $N \in [AM]$ astfel încât $[MN] \equiv [NB]$. Patrulaterul $ABMC$ fiind inscriptibil rezultă că

$$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{ACB}) = 60^\circ,$$

deci triunghiul BMN este echilateral cu $[BN] \equiv [NM] \equiv [BM]$.
Din $\triangle ABN \equiv \triangle CBM$ (L.U.L.) rezultă că $[MC] \equiv [AN]$. Atunci

$$AM = AN + NM = MC + MB.$$

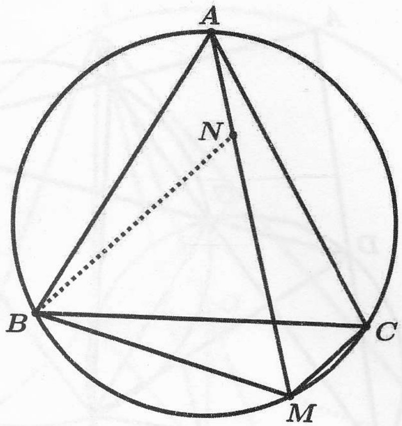

Figura 1.5

6. *Se consideră triunghiul echilateral ABC şi M un punct oarecare în plan, ce nu aparţine cercului circumscris triunghiului. Arătaţi că distanţele MA, MB, MC reprezintă lungimile laturilor unui triunghi (teorema lui D. Pompeiu).*

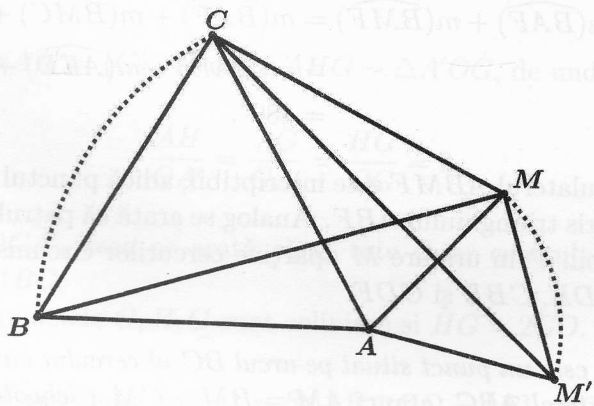

Figura 1.6

Soluţie. Considerăm rotaţia de centru A şi unghi $\alpha = 60°$, care duce punctul B în C, M în M' astfel încât $[AM] \equiv [AM']$ şi $m(\widehat{MAM'}) = 60°$. Atunci $[AM] \equiv [MM']$. Segmentul $[MB] \equiv [M'C]$, deci se observă că laturile triunghiului $MM'C$ sunt $[MM'] \equiv [MA]$, $[M'C] \equiv [MB]$ şi MC.

7. *Să se arate că proiecţiile ortogonale ale unui punct M de pe cercul circumscris triunghiului ABC pe laturile acestuia sunt coliniare.*

Soluţie. Fie A', B', C' proiecţiile punctului M pe laturile triunghiului ABC.

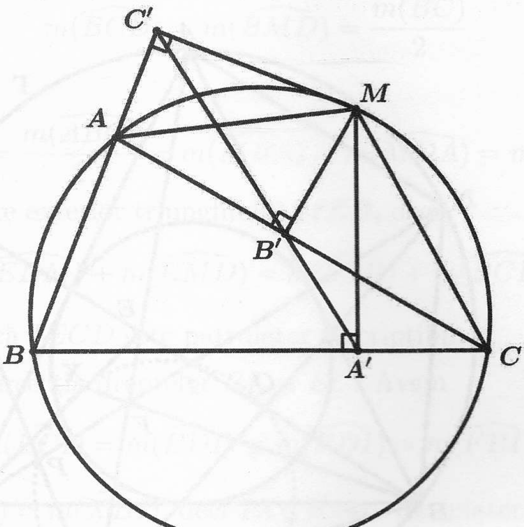

Figura 1.7

Observăm că patrulaterele $ABCM$, $MC'AB'$ şi $MB'A'C$ sunt inscriptibile. Atunci

$$m(\widehat{A'B'C}) = m(\widehat{A'MC}) = 90^\circ - m(\widehat{MCB}) = 90^\circ - m(\widehat{MAC'})$$
$$= m(\widehat{AMC'}) = m(\widehat{AB'C'}),$$

ceea ce arată că punctele A', B', C' sunt coliniare şi că se află pe o aceeaşi dreaptă numită **dreapta lui Simson**.

Observaţie. Are loc şi reciproca: Fie M un punct exterior triunghiului ABC şi A', B', C' proiecţiile lui M pe laturile triunghiului. Dacă punctele A', B', C' sunt coliniare, atunci M se află pe cercul circumscris triunghiului.

8. *Fie triunghiul isoscel ABC, $[AB] \equiv [AC]$, I centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi Γ cercul circumscris triunghiului ABC. Dreptele BI şi CI intersectează cercul Γ în punctele M, respectiv N. Fie D un punct pe arcul $\overset{\frown}{BC}$ care nu conţine punctul A, iar E şi F intersecţiile dreptei AD cu BI şi CI. Notăm $\{P\} = DM \cap CI$ şi $\{Q\} = DN \cap BI$. Arătaţi că:*

a) punctele D, I, P, Q se găsesc pe un cerc Ω;

b) dreptele CE şi BF se intersectează pe cercul Ω.

XXXIV Olimpiadi Italiane della Matematica, 2018

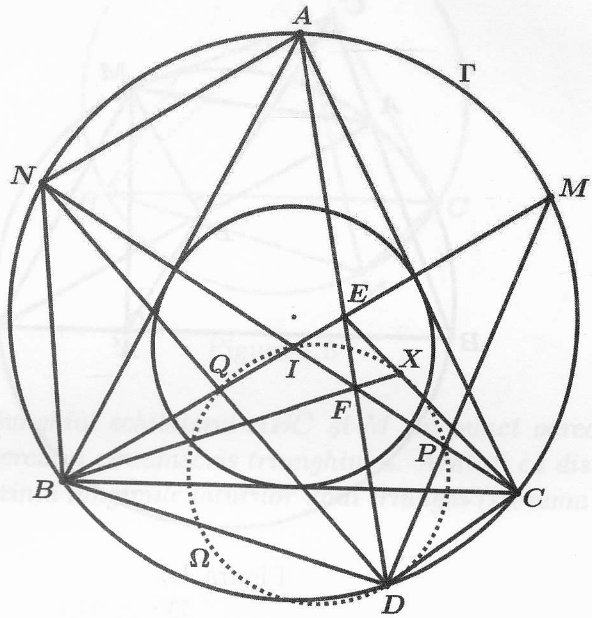

Figura 1.8

Soluţie. a) $m(\widehat{PIQ}) = 180^\circ - (m(\widehat{ICB}) + m(\widehat{IBC}))$

$$= 180^\circ - \left(\frac{m(\widehat{ABC})}{2} + \frac{m(\widehat{ACB})}{2}\right) = 180^\circ - m(\widehat{ABC}).$$

Ţinând cont de patrulaterele inscriptibile $ABDN$ şi $ACDN$, avem

$$m(\widehat{NDM}) = m(\widehat{NDA}) + m(\widehat{MDA}) = m(\widehat{ACN}) + m(\widehat{MBA})$$
$$= \frac{m(\widehat{ABC})}{2} + \frac{m(\widehat{ACB})}{2} = m(\widehat{ABC}).$$

Observăm că

$$m(\widehat{PIQ}) + m(\widehat{NDM}) = 180^\circ - m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB}) = 180^\circ,$$

deci patrulaterul $DPIQ$ este inscriptibil, punctele D, P, I, Q se găsesc pe un acelaşi cerc, notat Ω.

b) Observăm că $m(\widehat{BIF}) = 180° - m(\widehat{ABC})$ şi $m(\widehat{BDF}) = m(\widehat{ACB})$, de unde deducem că $BIFD$ este patrulater inscriptibil. De asemenea:

$$m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{BMD}) = \frac{m(\widehat{BC})}{2}$$

şi

$$m(\widehat{ICB}) = \frac{m(\widehat{ABC})}{2} = m(\widehat{MBA}) = m(\widehat{MDA}) = m(\widehat{MDE}).$$

Unghiul IED este exterior triunghiului MED, deci

$$m(\widehat{IED}) = m(\widehat{EDM}) + m(\widehat{EMD}) = m(\widehat{ICB}) + m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{ICD}),$$

de unde rezultă că $IECD$ este patrulater inscriptibil.

Notăm cu X intersecţia dreptelor BF şi EC. Avem

$$m(\widehat{ECI}) = m(\widehat{EDI}) \text{ şi } m(\widehat{FDI}) = m(\widehat{FBI}),$$

de unde $m(\widehat{XCI}) = m(\widehat{XBI})$, deci $IXCB$ este patrulater inscriptibil. Pentru ca punctul X să fie pe cercul Ω, vom arăta că patrulaterul $IXPD$ este inscriptibil. Avem

$$m(\widehat{EXI}) = 180° - m(\widehat{IXC}) = m(\widehat{IBC}) = \frac{m(\widehat{ABC})}{2},$$

$$m(\widehat{BXC}) = m(\widehat{BIC}) = 180° - m(\widehat{ABC}).$$

Din $DCFX$ patrulater inscriptibil, avem $m(\widehat{DFC}) = m(\widehat{DXC})$. În triunghiul DFP:

$$m(\widehat{FPD}) = 180° - m(\widehat{PDF}) - m(\widehat{PFD}) = 180° - \frac{m(\widehat{ABC})}{2} - m(\widehat{DXC})$$
$$= 180° - m(\widehat{EXI}) - m(\widehat{DXC}) = m(\widehat{IXD}),$$

deci patrulaterul $IXPD$ este inscriptibil, iar punctele D, I, P, X sunt pe acelaşi cerc Ω.

9. *Fie triunghiul ABC şi D, E, F punctele în care cercul înscris în triunghi intersectează laturile triunghiului. Cercul ce trece prin A şi B include triunghiul ABC şi intersectează dreapta DE în punctele P şi Q. Să se arate că mijlocul segmentului AB se găseşte pe cercul circumscris triunghiului PQF.*

Singapore SMO, 2017

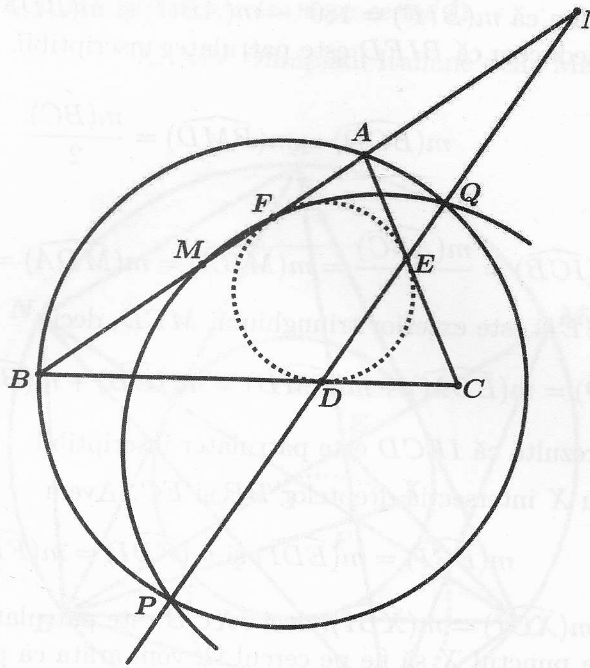

Figura 1.9

Soluţie. Fie M mijlocul segmentului AB. Dacă $DE \| AB$, atunci triunghiul ABC este isoscel, cu $[CA] \equiv [CB]$, şi F coincide cu M. Dacă $DE \nparallel AB$ notăm $\{N\} = DE \cap AB$. Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul ABC, obţinem

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1,$$

de unde ţinând cont că $[CE] \equiv [CD]$, $[BD] \equiv [BF]$ şi $[AE] \equiv [AF]$, obţinem

$$\frac{AN}{BN} \cdot \frac{BF}{AF} = 1 \Leftrightarrow AN \cdot BF = BN \cdot AF$$

$$\Leftrightarrow AN \cdot (BN - NF) = BN \cdot (NF - NA)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot AN \cdot BN = NF \cdot (BN + AN)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot AN \cdot BN = NF \cdot (NM + BM + NM - AM)$$

$$\Leftrightarrow AN \cdot BN = NF \cdot MN.$$

Dar $AN \cdot BN = NP \cdot NQ$, deci $NP \cdot NQ = MN \cdot NF$, de unde rezultă că punctele P, Q, F, M sunt coliniare.